Rapport et sujets, oral HEC, Mathématiques (BL)

Juin-juillet 2021

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de grandes qualités d'expression et de logique. Bien sûr, il y a une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 2 à 19.
Les candidats les plus faibles ont montré de grosses faiblesses en calcul.
A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs intuitions et la finesse de leurs raisonnements. La moyenne est de $11,44$ et l'écart-type est de $4,22$.
Le jury aimerait insister sur certaines fautes récurentes :

— L'usage des quantificateurs est parfois difficile pour les candidats : par exemple la définition précise d'une valeur propre est souvent compliquée à obtenir.

— Le jury insiste sur le rôle du tableau : il doit être utilisé comme un support et doit permettre à l'étudiant de commenter son travail mais il n'est pas nécessaire d'y voir tous les calculs. Un juste équilibre doit être trouvé, certains candidats veulent recopier l'intégralité de leur brouillon, d'autre ne rien écrire.

— Les étudiants pensent souvent, à tort, qu'une limite existe toujours et utilise le symbole lim a mauvais escient.

— Il est utile de connaitre les lettres grecques. Il est parfois difficile de suivre les étudiants lorsqu'ils confondent deux lettres de leur énoncé.

— Il est important qu'un étudiant sache étudier une fonction et en dessiner le graphe.

— Il est inutile de demander au jury de sauter une question graphique, il ne le fera pas.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.
L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de sauver des oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET BL2

Exercice principal BL2

Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que la fonction f vérifie la propriété $\mathcal{L}_k$ sur I s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^{+^*}$ tel que

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

1. Question de cours.
   Rappeler l'égalité et l'inégalité des accroissements finis.
2. (a) Montrer que les fonctions sinus et valeur absolue vérifient la propriété $\mathcal{L}_1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'on ne peut pas trouver de réel $k \in \mathbb{R}^{+^*}$ tel que la fonction racine carrée vérifie la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $[0, 1]$.
   (c) Montrer que s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{L}_k$ sur I, alors f est continue sur I.
3. Soient un réel $k \in]0, 1[$, f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|.$$
   (b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite notée ℓ et vérifiant $f(\ell) = \ell$.

4. Soient un réel $k \in]0, 1[$, f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $\mathbb{R}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+1} = f(T_n).$$

   Soit ℓ la limite trouvée à la question 3.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = [k^n|T_0 - \ell| \geqslant \varepsilon]$. Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$
   (b) Montrer que
   $$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon) = 0.$$
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_{T_n} la fonction de répartition de la variable T_n.
   Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R} - \{\ell\}, \qquad \lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = F(x)$$
   où F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont on reconnaitra la loi.

Solution :

1. Question de cours.
   Egalité et inégalité des accroissements finis. Voir le programme officiel, page 11.

2. (a) Soit $f : x \mapsto \sin(x)$ la fonction sinus. Soit $y \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Si $x \in]-\infty, y[$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $]x, y[$, on trouve

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \max_{t \in [x,y]} |\cos(t)|\,|x - y| \leqslant |x - y|.$$

L'inégalité se démontre de même si $x \in]y, +\infty[$.
Si $x = y$, la formule reste vérifiée.
On conclut que la fonction sin vérifie la propriété $\mathcal{L}_1$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $f : x \mapsto |x|$ la fonction valeur absolue. Alors, par un corollaire de l'inégalité triangulaire,

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leqslant |x - y|.$$

Ainsi, la fonction f vérifie la propriété $\mathcal{L}_1$ sur $\mathbb{R}$.
Remarque : dans le programme officiel, apparait la mention "inégalité triangulaire" sans plus de précision. La seconde forme de l'inégalité triangulaire pourra donc être ici redémontrée.

(b) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ la fonction racine carrée. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que f vérifie la propriété $\mathcal{L}_k$ sur $[0, 1]$. Alors,

$$\forall\,(x, y) \in [0, 1]^2, \qquad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant k|x - y|.$$

Comme $k > 0$, il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $0 < \dfrac{1}{n^2k^2} \leqslant \dfrac{1}{nk^2} \leqslant 1$. On pose $x = \dfrac{1}{n^2k^2}$ et $y = 0$.
Il suit que

$$|\sqrt{x}| = \frac{1}{nk} \leqslant k|x| = \frac{1}{n^2k}$$

ce qui est une contradiction, du fait que $k > 0$ et $n \geqslant 2$.

(c) Soit f une fonction vérifiant la propriété $\mathcal{L}_k$ sur I, avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in I$ un réel fixé. Alors,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|.$$

En faisant tendre x vers a et en utilisant la continuité de la valeur absolue et le théorème d'encadrement, on conclut que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ceci prouve que f est continue au point a.

3. (a) On prouve la propriété par récurrence sur n.

(b) Comme $k \in]0, 1[$, la série géométrique $\sum k^n$ converge. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge absolument, donc converge. On montre classiquement que la convergence de la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ implique la convergence de la suite (u_n) vers une limite finie. On note ℓ cette limite. On passe à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Par continuité de la fonction f (question 2(d)), on obtient $\ell = f(\ell)$.

4. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Soit F_{T_0} la fonction de répartition de la variable T_0. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(k^n|T_0 - \ell| \geqslant \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(-\varepsilon \leqslant k^n(T_0 - \ell) \leqslant \varepsilon) = 1 - F_{T_0}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{k^n}\right) + F_{T_0}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{k^n}\right).$$

Comme $k \in]0, 1[$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\varepsilon}{k^n}\right) = +\infty.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} F_{T_0}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{k^n}\right) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} F_{T_0}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{k^n}\right) = 0.$$

Par suite,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1 - 1 + 0 = 0.$$

(b) Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|T_{n+1}(\omega) - \ell| = |f(T_n)(\omega) - f(\ell)| \leqslant k|T_n(\omega) - \ell|.$$

Par récurrence sur n, on montre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |T_n(\omega) - \ell| \leqslant k^n|T_0(\omega) - \ell|.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad [|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon] \subset [k^n |T_0 - \ell|] \geqslant \varepsilon] = A_n.$$

Par croissance de la probabilité, $0 \leqslant \mathbb{P}(|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(A_n)$.
Par théorème d'encadrement,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Remarque : on en déduit au passage que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - \ell| > \varepsilon) = 0$$

du fait que $[|T_n - \ell| > \varepsilon] \subset [|T_n - \ell| \geqslant \varepsilon]$.
On dit que la suite de variables (T_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à ℓ, mais cette notion n'est pas au programme de la BL.

(c) • Si $x > \ell$, on pose $\varepsilon = x - \ell > 0$ de sorte que $x = \ell + \varepsilon$.
Alors,

$$1 \geqslant F_{T_n}(x) = \mathbb{P}(T_n \leqslant x) = \mathbb{P}(T_n \leqslant \ell + \varepsilon) = \mathbb{P}(T_n - \ell \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathbb{P}(|T_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Par passage au complémentaire dans la question précédente (cf. remarque), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - \ell| \leqslant \varepsilon) = 1.$$

Par théorème d'encadrement, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = 1.$$

• Si $x < \ell$, on pose $\varepsilon = \ell - x > 0$ de sorte que $x = \ell - \varepsilon$.
Alors,

$$0 \leqslant F_{T_n}(x) = \mathbb{P}(T_n \leqslant x) = \mathbb{P}(T_n - \ell \leqslant -\varepsilon) = \mathbb{P}(\ell - T_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|\ell - T_n| \geqslant \varepsilon)$$

Par théorème d'encadrement et en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = 0.$$

On conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \ell \\ 0 & \text{si } x < \ell \end{cases}$$

On reconnait en F la fonction de répartition de la variable certaine égale à ℓ.
On dit que la suite de variables (T_n) converge en loi vers la variable certaine égale à ℓ, mais cette notion n'est pas au programme de la BL.

Exercice sans préparation BL2

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On dit que deux matrices M_1 et M_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont <u>semblables</u> s'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M_1 = QM_2Q^{-1}.$$

On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Les matrices A et B sont-elles semblables ?
2. (a) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$?
   (b) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ soit semblable à B ?

Solution :

La notion de "matrices semblables" n'apparait pas au programme de la voie BL.

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que A et B sont semblables. Ainsi, il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$. Alors, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\},\ AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\},\ QBQ^{-1}X = \lambda X$$

   Donc,

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\},\ BQ^{-1}X = \lambda Q^{-1}X \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, Y = Q^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) - \{0\},\ BY = \lambda Y$$

   On conclut que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda \in \mathrm{Sp}(B).$$

   Or, les matrices A et B étant triangulaires supérieures, leur spectre se lit sur la diagonale. Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\} \neq \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$. On conclut que A et B ne sont pas semblables.
   Variante : on pouvait aussi remarquer que A est diagonalisable (puisque déjà diagonale), alors que B ne l'est pas. En effet, comme $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$, si B était diagonalisable, ce serait la matrice nulle. Les matrices A et B ne sont donc pas semblables.
2. (a) Comme la matrice A est diagonale, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, A^k est aussi diagonale. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$, qui est une combinaison linéaire de matrices diagonales, est diagonale. Comme B n'est pas diagonale, il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.
   (b) Comme mentionné ci-avant, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$ est une matrice diagonale.
   Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ et B sont semblables : il existe alors une matrice R inversible telle que $B = RP(A)R^{-1}$. Ainsi, la matrice B est diagonalisable, ce qui est une contradiction. On conclut qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ et B sont semblables.

Question supplémentaire éventuelle.

Recommencer l'exercice avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C'est le même principe que ce qui précède et, par suite, les mêmes réponses.
En effet, A est diagonalisable puisque A a n valeurs propres deux à deux distinctes alors que B ne l'est pas puisque $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ et $B \neq O_n$.
On note que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$ reste diagonalisable. En effet, s'il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = QDQ^{-1}$, alors $P(A) = QP(D)Q^{-1}$, où $P(D) = \mathrm{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ est diagonale.
Ainsi, il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ et B soient identiques ou semblables.

SUJET BL3

Exercice principal BL3

On considère une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_0(X) = 1 \qquad P_1(X) = X \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \geqslant 2, \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. Question de cours : rappeler la définition d'une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P_n'(X) = P_{n-1}(X-1).$$
   (b) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geqslant k$,
$$P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k).$$
   On rappelle que $P_n^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du polynôme P_n.

   (c) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k) P_k(X)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ l'application telle que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$\varphi(Q)(X) = Q(X) - Q'(X+1).$$
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

   (b) Montrer que l'endomorphisme φ est bijectif et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, écrire la décomposition de $\varphi^{-1}(P_k)$ dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à déterminer tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant
$$Q(X) - Q'(X+1) = \frac{X^n}{n!} \qquad (\star)$$
   (a) Montrer que si Q est un polynôme solution du problème, son degré vaut n.

   (b) Montrer que le problème admet un unique polynôme solution Q dont on écrira la décomposition dans la base $\mathcal{B}$.

Solution :

1. Définition d'une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   Voir le programme officiel page 14.
2. Chaque polynôme P_k est de degré k. En tant que famille de polynômes à degré échelonné, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme cette propriété n'apparait pas dans le programme officiel, le candidat pourra faire un test de liberté. Comme cette famille contient (n+1) polynômes, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) On note que $P_1'(X) = 1 = P_0(X-1)$. Pour tout $n \geqslant 2$, $P_n'(X) = \dfrac{\left((X-n)^{n-1} + (n-1)X(X-n)^{n-2}\right)}{n!} = \dfrac{(X-n)^{n-2}(nX-n)}{n!} = \dfrac{(X-1)(X-1-(n-1))^{n-2}}{(n-1)!} = P_{n-1}(X-1)$.

(b) On procède par récurrence sur k. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\wp(k)$: " pour tout entier $n \geqslant k$, $P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$." La propriété $\wp(1)$ est vraie d'après la question 3(a). Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \geqslant k+1$, $P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$. En dérivant et en utilisant 2(a), on obtient $P_n^{(k+1)}(X) = P'_{n-k}(X-k) = P_{n-k-1}(X-k-1)$, ce qui prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

(c) Par la question 2, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ uniques tels que $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i$. Soit $(i,k) \in \mathbb{N}^2$. On note que si $i > k$, $P_i^{(k)}(k) = P_{i-k}(0) = 0$, si $i = k$, $P_k^{(k)}(k) = P_0(0) = 1$ et si $i < k$, $P_i^{(k)} = 0$ car P_i est de degré i. Ainsi, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $Q^{(k)}(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i^{(k)}(k) = a_k$. On en déduit que $Q = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k) P_k$.

4. (a) • L'application φ est linéaire par linéarité de la dérivation. De plus, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q'(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$, d'où $\varphi(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Comme $\varphi(P_0) = P_0$ et comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(P_k)(X) = P_k(X) - P'_k(X+1) = P_k(X) - P_{k-1}(X)$, la matrice représentative de φ dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• La matrice M étant triangulaire supérieure, on lit directement que $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}$. Comme φ n'est pas l'application identité (M n'est pas la matrice identité car $n \geqslant 1$), l'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

(b) Comme $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$, M est inversible, donc φ est bijectif. On écrit $M = I_{n+1} - N$, où $N \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients au-dessus de la diagonale tous égaux à 1. La matrice N est nilpotente d'ordre $n+1$. Ainsi,

$$(I_{n+1} - N)(I_{n+1} + N + N^2 + \cdots + N^n) = I_{n+1} - N^{n+1} = I_{n+1}.$$

Il suit que $M^{-1} = I_{n+1} + N + \cdots + N^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme M^{-1} est la matrice représentative de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$, on lit que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi^{-1}(P_k) = \sum_{j=0}^{k} P_j$.

5. (a) On remarque tout d'abord que le polynôme nul n'est pas solution du problème. Posons alors $d = \deg(Q) \in \mathbb{N}$. Comme $\deg\left(Q'(X+1)\right) < d$, alors $\deg\left(Q(X) - Q'(X+1)\right) = d$. Comme $\deg\left(\dfrac{X^n}{n!}\right) = n$, l'égalité des degrés dans $(\star)$ donne $d = n$.

(b) • On note que Q est solution du problème si et seulement si $\varphi(Q) = \dfrac{X^n}{n!}$. Comme Q et $\dfrac{X^n}{n!}$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\varphi(Q) = \frac{X^n}{n!} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \varphi^{-1}\left(\frac{X^n}{n!}\right).$$

Le problème posé admet donc une seule et unique solution.

• Posons $T(X) = X^n$. Par la question 3(c), $T = \sum_{k=0}^{n} T^{(k)}(k) P_k$.

Or, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $T^{(k)}(X) = \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$.

Ainsi, par linéarité de φ^{-1},

$$Q = \frac{1}{n!}\varphi^{-1}(T) = \frac{1}{n!}\varphi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} T^{(k)}(k) P_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^{n-k}}{(n-k)!}\varphi^{-1}(P_k)$$

En utilisant le résultat de la question 4(b) et par permutation de deux sommes finies, on obtient

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{k} P_i \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \frac{k^{n-k}}{(n-k)!} \right) P_i.$$

Exercice sans préparation BL3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit f une densité de X.
Pour tout réel x tel que l'intégrale est définie, on pose

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant xt) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction G.
2. Montrer que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

Solution :

1. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Ainsi, $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.
   Ainsi,
   $$G(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant xt) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} F_X(xt) f(t)\,\mathrm{d}t$$
   en notant F_X la fonction de répartition de la variable X.
   Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto F_X(xt)f(t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\lim\limits_{t \to 0^+} F_X(xt)f(t) = 0$, l'intégrale est faussement impropre en 0.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,
   $$0 \leqslant F_X(xt)f(t) \leqslant f(t)$$
   Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant xt) f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   Ainsi, le domaine de définition de G est $\mathbb{R}$.
2. • Si $x < 0$,
   $$G(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \leqslant xt)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$
   Or, pour $x < 0$ et $t \geqslant 0$, $xt \leqslant 0$, donc $\mathbb{P}(X \leqslant xt) = 0$. Ainsi, $G(x) = 0$.
   • Si $x \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant xt) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda xt}$. Ainsi,
   $$G(x) = \int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda xt})dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt - \int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x+1)t}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x+1}.$$
   On conclut que
   $$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
   • G admet pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.
   • On note que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que
   $$\lim_{x \to 0^-} G(x) = G(0) = 0 = \lim_{x \to 0^+} G(x).$$
   La fonction G est donc continue sur $\mathbb{R}$.
   • La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec
   $$\forall x < 0, \quad G'(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0, \quad G'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$
   • On remarque que G est croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme G est continue en 0, G est croissante sur $\mathbb{R}$.
   On conclut que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité Y dont une densité est donnée par
   $$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sujet BL4

Exercice principal BL4

Soient $n \geqslant 2$ un entier naturel et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note I_n la matrice identité d'ordre n et O_n la matrice nulle d'ordre n.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$.

1. Question de cours : rappeler la définition d'une matrice inversible.
2. Une matrice nilpotente peut-elle être inversible ? Justifier.
3. On suppose dans cette question seulement $n = 2$ et on pose

$$d : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc. \end{array} \right.$$

   (a) L'application d est-elle linéaire ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
   (b) Montrer que pour tout couple $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$, $d(AB) = d(A)d(B)$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Trouver deux constantes $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ telles que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
   (d) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A est inversible si et seulement si $d(A) \neq 0$.

4. On revient au cas d'un entier $n \geqslant 2$ quelconque et l'on considère $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application non constante telle que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \qquad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

   <u>On admet la propriété suivante.</u> Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même rang r, il existe deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ P et Q telles que

$$M = PNQ.$$

   (a) Montrer que $\varphi(I_n) = 1$ et que $\varphi(O_n) = 0$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Calculer $\varphi(A)$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer

$$\exists (\alpha, N_r) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tels que } N_r \text{ soit nilpotente de rang } r \text{ et } \varphi(A) = \alpha\varphi(N_r).$$

   (d) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A \text{ est inversible si et seulement si } \varphi(A) \neq 0.$$

Solution :

1. Pour la définition d'une matrice inversible, voir programme officiel page 9.
2. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$. On raisonne par l'absurde en supposant que la matrice A est inversible. Alors en multipliant l'égalité précédente $A^p = O_n$ par A^{-1} p fois, on obtient $I_n = O_n$, ce qui est absurde. On conclut qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.
3. (a) • L'application d n'est pas linéaire. En effet, $= d(2I_2) = 4 \neq 2 = 2d(I_2)$.
   • Comme d n'est pas linéaire, on ne peut pas considérer son noyau. Pour prouver que d n'est pas injective, il suffit de remarquer que $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   • L'application d est surjective. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\alpha = d(A)$.

(b) Posons $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$.
Après calculs,

$$d(A)d(B) = (a_1a_4 - a_2a_3)(b_1b_4 - b_2b_3) = a_1a_4b_1b_4 + a_2a_3b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 - b_2b_3a_1a_4 = d(AB).$$

(c) Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$.
En écrivant $A^2 = \alpha A + \beta I_2$, on trouve un syst\`eme de quatre équations dont les inconnues sont α et β :

$$\begin{cases} a^2 + bc = \alpha a + \beta \\ (a+d)\,b = \alpha b \\ (a+d)\,c = \alpha c \\ bc + d^2 = \alpha d + \beta \end{cases}$$

En pensant à traiter à part le cas $b = c = 0$, on trouve que la solution de ce système est $\alpha = a+d = \mathrm{tr}(A)$ et $\beta = bc - ad = -d(A)$.
Remarque : on ne demandait pas ici de prouver l'unicité de la solution, mais seulement de trouver des valeurs de α et β qui conviennent.

(d) • Si $d(A) \neq 0$, alors $A^2 - \alpha A = \beta I_2$ avec β non nul. Donc, $A\left(\dfrac{1}{\beta}(A - \alpha I_2)\right) = I_2$, ce qui prouve que A est inversible avec $A^{-1} = \dfrac{1}{\beta}(A - \alpha I_2)$.
• Réciproquement, supposons A inversible. Raisonnons par l'absurde et supposons que $d(A) = 0$. Alors, on déduit de la question précédente que $A^2 = \alpha A$. En multipliant par A^{-1}, on trouve $A = \alpha I_2$. Comme $d(A) = 0$, on doit avoir $\alpha = 0$. Mais alors $A = O_2$ et n'est pas inversible : contradiction. Ainsi, $d(A) \neq 0$.

4. (a) • L'application φ n'est pas une application constante. Ce n'est donc pas l'application identiquement nulle.
Il existe donc une matrice $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(A_0) \neq 0$.
Par propriété de l'application φ,

$$\varphi(A_0) = \varphi(A_0 I_n) = \varphi(A_0)\varphi(I_n).$$

Comme $\varphi(A_0) \neq 0$, on conclut que $\varphi(I_n) = 1$.
• Si $\varphi(O_n) \neq 0$, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(O_n) = \varphi(AO_n) = \varphi(A)\varphi(O_n) \qquad \text{d'où} \qquad 1 = \varphi(A).$$

L'application φ serait l'application constante égale à 1. Ceci est exclu par hypothèse.
Donc $\varphi(O_n) = 0$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$. Alors, par propriété de l'application φ,

$$0 = \varphi(O_n) = \varphi(A^p) = \varphi(A)^p.$$

D'où $\varphi(A) = 0$.

(c) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\forall\, k \in [\![1, n-r]\!], \qquad u(e_k) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in [\![n-r+1, n]\!], \qquad u(e_k) = e_{k-1}.$$

Soit N_r la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{B}$. La matrice N_r est de rang r car ses $n-r$ premières colonnes sont nulles et les r suivantes forment une famille libre.
De plus, on peut remarquer que $N_r = O_n$, ce qui prouve que N_r est nilpotente.
Comme A et N_r ont le même rang, la propriété donnée dans l'énoncé dit qu'il existe deux matrices P et Q inversibles telles que

$$A = PN_rQ \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(A) = \varphi(P)\varphi(N_r)\varphi(Q).$$

On pose alors $\alpha = \varphi(P)\varphi(Q) \in \mathbb{R}$.

(d) • Si A est une matrice inversible,

$$1 = \varphi(I_n) = \varphi(AA^{-1}) = \varphi(A)\varphi(A^{-1}).$$

Ainsi, $\varphi(A) \neq 0$ et l'on note que $\varphi(A^{-1}) = (\varphi(A))^{-1}$.
• Supposons à présent que A ne soit pas inversible. On a donc $r = \mathrm{rg}(A) \leqslant n-1$. Si $r = 0$, alors $A = O_n$ et par suite, $\varphi(A) = \varphi(O_n) = 0$ comme vu en 3(a). Si $r \neq 0$, alors $r \in [\![1, n-1]\!]$. Par la question précédente, il existe un réel α et une matrice $N_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente et de rang r tels que $\varphi(A) = \alpha\varphi(N_r)$. Comme N_r est nilpotente, la question 3(b) montre que $\varphi(N_r) = 0$, par suite, $\varphi(A) = 0$.
Par contraposée, si $\varphi(A) \neq 0$, alors A est inversible.

Exercice sans préparation BL4

Soit x un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.
L'entier $\lfloor x \rfloor$ est appelé la partie entière de x.
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
On définit deux variables D_1 et D_2 par :

$$D_1 = \lfloor 10X \rfloor \qquad \text{et} \qquad D_2 = \lfloor 100X - 10D_1 \rfloor.$$

On admet que D_1 et D_2 ainsi définies sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires D_1 et D_2.
2. Les variables D_1 et D_2 sont-elles indépendantes ?

Solution :
On pourra remarquer que D_1 représente la première décimale de X et D_2 sa deuxième décimale.

1. • $X(\Omega) =]0,1[$, donc $(10X)(\Omega) =]0,10[$, d'où $D_1(\Omega) = [\![0,9]\!]$.
   • Comme $D_1 \leqslant 10X < D_1 + 1$, alors $10D_1 \leqslant 100X < 10D_1 + 10$, d'où $0 \leqslant 100X - 10D_1 < 10$.
   Ainsi, $D_2(\Omega) = [\![0,9]\!]$.
   • Notons f_X une densité de X. Pour tout $k \in [\![0,9]\!]$,

$$\mathbb{P}(D_1 = k) = \mathbb{P}(k \leqslant 10X < k+1) = \mathbb{P}\left(\frac{k}{10} \leqslant X < \frac{k+1}{10}\right) = \int_{k/10}^{(k+1)/10} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}.$$

   • Pour tout $k \in [\![0,9]\!]$, on trouve, en utilisant le système complet d'événements $([D_1 = j])_{j \in [\![0,9]\!]}$,

$$[D_2 = k] = [k \leqslant 100X - 10D_1 < k+1] = \bigcup_{j=0}^{9} \left([D_1 = j] \cap \left(\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right)\right)$$

   Or, pour tout $(k,j) \in ([\![0,9]\!])^2$,

$$\left[\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right] \subset \left[\frac{j}{10} \leqslant X < \frac{j+1}{10}\right] = [D_1 = j]$$

   D'où,

$$\mathbb{P}(D_2 = k) = \sum_{j=0}^{9} \mathbb{P}\left(\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right) = \sum_{j=0}^{9} \frac{1}{100} = \frac{1}{10}.$$

   Ainsi, D_1 et D_2 suivent la loi uniforme discrète sur $[\![0,9]\!]$.
2. Pour tout $(j,k) \in [\![0,9]\!]^2$,

$$[D_1 = j \cap D_2 = k] = \left[\frac{j}{10} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{1}{10}\right] \cap \left[\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right]$$

   Comme

$$\left[\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right] \subset \left[\frac{j}{10} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{1}{10}\right]$$

   il suit que

$$\mathbb{P}(D_1 = j \cap D_2 = k) = \mathbb{P}\left(\frac{j}{10} + \frac{k}{100} \leqslant X < \frac{j}{10} + \frac{k}{100} + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100} = \mathbb{P}(D_1 = j)\mathbb{P}(D_2 = k)$$

   Les variables D_1 et D_2 sont donc indépendantes.