Rapport et sujet de l'oral HEC, Aptitude logique (BEL)

Juin-juillet 2021

Le bilan de la session 2021 de l'oral d'aptitude logique est satisfaisant

Le niveau des candidats est très hétérogène : les notes se sont étalées entre 4 et 20. La moyenne s'établit à 12,31 et l'écart-type à 4,33.

Certains candidats ont fait preuve de brio et de finesse en dégageant les enjeux techniques des textes proposés, en effectuant efficacement des calculs élémentaires et en montrant une bonne compréhension des aspects quantitatifs de problèmes concrets. D'autres ont eu du mal à faire autre chose que de la paraphrase sur le texte, et n'ont pas su répondre aux questions.

Rappelons le format de l'épreuve :

le candidat se voit proposer un sujet qui contient :

— un texte ancien ou contemporain, avec un enjeu technique ou mathématique, et/ou un tableau statistique à interpréter.

— des questions de logiques et/ou de mathématiques élémentaires liées directement ou indirectement au document présenté.

Le candidat commence par proposer un résumé bref et synthétique du document, insistant sur l'aspect technique des enjeux soulevés, plutôt que sur les aspects historiques, puis il répond aux questions posées avec si besoin, de l'aide et des indications du jury.

Enfin le candidat se voit proposer des questions sans préparation.

Les pré-requis scolaires pour répondre aux questions ne dépassent pas ceux de la classe de seconde, il peut s'agir de règles de trois, de pourcentages, d'interprétations de graphique, de calcul élémentaires ou de dénombrement. Des questions de logique peuvent aussi être posées.

Pour réussir cette épreuve, les candidats sont invités à faire preuve de bon sens et à écouter les indications du jury.

Vous trouverez ensuite, à titre d'exemple, deux sujets proposés cette année.

SUJET M1

Epreuve orale d'aptitude logique **Concours HEC 2021**

Présenter et commenter brièvement ce texte puis répondez aux questions posées à la fin du document.

Galilée a rédigé vers 1620 sous le titre *Sopra le scoperte dei dadi*, un mémoire où il calcule la probabilité que la somme des faces de trois dés soit égale à une certaine valeur, cette question lui ayant été posée par le grand-duc de Toscane. La première publication du texte date de 1718 dans une édition collective des Oeuvres de Galilée.

« **Recherche concernant le jeu de dés :**

Le fait que dans un jeu de dès certaine sommes sont plus avantageuse que d'autres a une raison évidente, à savoir le fait que les réalisations de ces nombres sont plus aisées et plus fréquentes que d'autres car ils sont plus à même d'être obtenus par une plus grande variété de nombres. Ainsi un 3 et un 18, qui résultent de jets qui ne peuvent être réalisés que d'une seule manière avec trois dés (dans le dernier cas par trois 6 et dans le premier par trois 1, et de nulle autre manière) sont plus difficiles à obtenir que, par exemple 6 ou 7, qui peuvent être obtenus de diverses façons, le 6 avec 1,2,3 ou 2,2,2 ou 1,1,4, et le 7 avec 1,1,5 ou 1,2,4 ou 1,3,3 ou 2,2,3. Néanmoins, bien que 9 et 12, peuvent être obtenus par le même nombre de manières que 10 et 11, et qu'ils devraient donc être considérés comme de même utilité dans ce jeu, on sait déjà par une longue observation que les joueurs considèrent 10 et 11 comme plus avantageux que 9 et 12. Et il est clair que 9 et 10 peuvent être composés par une égale diversité de nombres (et ceci est également vrai pour 12 et 11) : car 9 est composé de 1,2,6 ou 1,3,5, ou 1,4,4 ou 2,2,5 ou 2,3,4 ou 3,3,3, qui sont six triplets, et 10 de 1,3,6 ou 1,4,5 ou 2,2,6 ou 2,3,5 ou 2,4,4 ou 3,3,4 et pas d'autres manières, et ces dernières sont aussi six triplets.
Maintenant, afin d'obliger la personne qui m'a ordonné d'étudier le problème, je vais exposer mes idées, dans l'espoir non seulement de résoudre ledit problème, mais aussi d'ouvrir la voie à une compréhension précise des raisons pour lesquelles tous les détails du jeu ont été arrangés et ajustés avec grand soin.
Et pour atteindre ce but avec toute la clarté dont je suis capable, je vais commencer par considérer que, puisqu'un dé a six faces, et que lorsqu'il est jeté il peut également tomber sur chacune d'elles, seulement six jets différents les uns des autres peuvent être réalisés avec lui. Mais si en même temps que ce premier dé nous en jetons un second, qui lui aussi a six faces, nous pouvons réaliser 36 jets, chacun étant différent de tous les autres, puisque chaque face du premier dé peut être combinée avec chaque face du second, et en conséquence peut amener six jets différents, et donc il est clair que le nombre de ces combinaisons est 6 fois 6, soit 36. Et si nous ajoutons un troisième dé, puisque chacune de ses six faces peut être combinée avec chacune des 36 combinaisons des deux autres dés, nous trouverons que les combinaisons de trois dés sont au nombre de 6 fois 36, soit 216, chacune d'elles étant différente des autres. Mais parce que les sommes de ces combinaisons résultant du jet de trois dés sont seulement au nombre de 16, à savoir 3,4,5 etc. jusqu'à 18, parmi lesquels nous devons partager les 216 jets, il est donc nécessaire que de nombreux jets correspondent à chacune de ces sommes ; et si nous pouvons trouver combien appartiennent à chacune, nous aurons préparé la voie pour trouver ce que nous cherchons. **Il sera suffisant d'effectuer une telle recherche pour des sommes de 3 à 10, car ce qui correspond à l'une de ces sommes correspond aussi aux sommes plus grandes.**
Trois points doivent être notés spécifiquement pour une bonne compréhension de ce qui suit. Le premier est que la somme des points de trois dés qui est composée de trois nombres égaux, ne peut être réalisée que par un jet unique des dés : et ainsi un 3 ne peut être réalisé que par trois faces 1, et un 6, s'il doit être réalisé avec trois 2 ne peut être réalisé que par un jet unique. Deuxièmement : la somme qui résulte de trois nombres dont deux sont identiques et le troisième différent, peut être réalisée par trois jets : par exemple un 4 qui est composé de 2 et de deux 1, peut être obtenu par trois jets différents ; c'est-à-dire quand le premier dé montre 2 et le second ainsi que le troisième montrent 1, ou le second dé un 2 et le premier et le troisième un 1 ; ou le troisième un 2 et le premier et le second un 1. Et également, par exemple un 8, quand il est réalisé avec 3,3,2 peut aussi être réalisé de trois façons ; c'est-à-dire quand le premier dé montre 2 et le second ainsi que le troisième montrent 3, ou le second dé un 2 et le premier et le troisième un 3 ; ou le troisième un 2 et le premier et le second un 3.
Troisièmement la somme des points qui résulte de trois nombres différents peut être obtenue de six façons. Par exemple un 8 réalisé par 1,3,4 peut être obtenu par six différents jets : d'abord quand le premier dé montre 1, le second 3, et le troisième 4 ; deuxièmement, quand le premier dé montre toujours 1, mais le second 4 et le troisième 3 ; troisièmement, quand le second dé montre 1, le premier 3 et le troisième 4 ; quatrièmement, quand le second dé montre toujours 1, le premier 4 et le second 3., ,etc. … Donc, nous avons à présent déclaré ces trois points fondamentaux : premièrement que les triplets, c'est-à-dire la somme des jets des trois dés, qui résultent de trois nombres égaux, ne peuvent être produits que d'une manière, deuxièmement que les triplets qui sont composés de deux nombres égaux et d'un troisième différent sont produits de trois façons ; troisièmement que les triplets résultant de trois nombres différents sont produits de six façons. A partir de ces points

fondamentaux nous pouvons facilement déduire de combien de façons, ou plutôt en combien de jets différents, toutes les sommes de trois dés peuvent être formées, ce qui sera facilement compris à partir de la table qui suit.

1																
3																
6	10		9		8		7		6		5		4		3	
10	631	6	621	6	611	3	511	3	411	3	311	3	211	3	111	1
15	622	3	531	6	521	6	421	6	321	6	221	3				
21	541	6	522	3	431	6	331	3	222	1						
25	532	6	441	3	422	3	322	3								
27	442	3	432	6	332	3										
108	433	3	333	1												
108		27		25		21		15		10		6		3		1
216																

En haut de la table sont notés les points des jets de 10 à 3, et en dessous apparaissent les différents triplets desquels chacun peut résulter ; près desquels sont placés le nombre de façons par lesquelles chaque triplet peut être obtenu, et en dessous est finalement montrée la somme de toutes les façons d'obtenir ces jets. Ainsi, par exemple, dans la première colonne nous avons la somme de 10 points et en dessous ses six triplets de nombres avec lesquels il peut être réalisé qui sont 6,3,1 ; 6,2,2 ; 5,4,1 ; 5,3,2 ; 4,4,2 ; 4,3,3. Et comme le premier triplet 6,3,1 est constitué de trois nombres différents, il peut (comme indiqué ci-dessus) être réalisé par six différents jets de dés, et donc près de ce triplet un 6 est noté : et puisque le second triplet 6,2,2 est constitué de deux nombres égaux et d'un troisième différent, il peut uniquement être produit par trois jets différents, et donc un 3 est noté près de lui. Le troisième triplet 5,4,1, étant constitué de trois nombres différents, peut être réalisé par six jets et donc un 6 lui est accolé ; et ainsi de suite avec les autres triplets. Finalement en bas de la petite colonne de nombres de jets, ceux-ci sont additionnés : on peut ainsi voir que la somme de 10 points peut être réalisée par 27 différents jets alors que la somme de 9 points ne peut l'être que par 25 jets, le 8 par 21, le 7 par 15, le 6 par 10, le 5 par 6, le 4 par 3, et finalement le 3 par 1 jet. Le tout additionné ensemble donne 108. Et il y a le même nombre de jets pour les sommes de points supérieures, à savoir pour les points 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, si bien que l'on arrive au nombre total de tous les jets possibles réalisables avec les six faces de trois dés, qui est de 216. Et à partir de la table, toute personne qui comprend le jeu peut précisément mesurer tous les avantages et autres règles spéciales observées dans ce jeu. »

Questions :

1. Justifier l'affirmation de la phrase en gras dans le texte : « **Il sera suffisant d'effectuer une telle recherche pour des sommes de 3 à 10, car ce qui correspond à l'une de ces sommes correspond aussi aux sommes plus grandes. »**

2. Commentez la phrase : « on sait déjà par une longue observation que les joueurs considèrent 10 et 11 comme plus avantageux »

3. Calculer la probabilité que la somme du jet de 3 dés soit inférieure ou égale à 8.

4. Calculer la probabilité que la somme du jet de 4 dés soit égale à 6.

Réponses :

1. Les résultats sont symétriques pour les sommes de 3 à 10 et 11 à 18.
2. On peut s'attendre à ce que le candidat réfléchisse à ce que « une longue observation » permette d'inférer sur une estimation de la valeur la plus probable…et également une observation sur le fait que la somme de 10 correspond au nombre maximal de 27 configurations.
3. (21+15+10+6+3+1)/216=25,92%
4. 10/1296=0,77%

Exercice sans préparation

Question logique :
On regarde une montre à aiguilles.
1. Combien il y a –t-il de différents instants de la journée où la grande et la petite aiguilles sont superposées ?
2. Préciser les 2 premiers instants où cela arrive.

Réponses : Il y en a 12. Le 1er à t=0h et le deuxième à t=12/11h=1h5'27''

Question numérique :
Une entreprise employait 500 personnes dont 99% d'ouvriers. Un plan de restructuration a conduit au licenciement d'un certain nombre d'ouvriers, et il y a maintenant 98% d'ouvriers dans l'entreprise. Sachant que les licenciements ne concernent que des ouvriers, combien d'ouvriers ont-ils été licenciés ?

Réponse:
1% des 500 employés non ouvriers, soit 5 employés, n'ont pas été licenciés.
Ces 5 employés correspondent à 2% des employés restant après licenciement: il reste donc 250 employés et 250 ouvriers ont été licenciés!

SUJET 4M

Epreuve orale d'aptitude logique **Concours HEC 2021**

Présenter et commenter brièvement ce texte puis répondez aux questions posées à la fin du document.

Au tennis, les règles du jeu sont faites pour amplifier les différences.

Pour comprendre comment, rappelons-en rapidement les règles.
Le principe de base de ce sport est de gagner des points à l'aide desquels on gagne des jeux ; en gagnant des jeux, on gagne des sets ; en gagnant des sets, on remporte le match.

Soyons plus précis : pour remporter un jeu, il faut gagner au moins quatre points, avec une avance de deux points (au détail près que le décompte des points se fait sous la forme 0-15-30-40-JEU, un système hérité du jeu de paume). Pour remporter un set "sans tie-break", il faut gagner au moins 6 jeux, avec deux points d'écart. Dans un set "avec tie-break", les mêmes règles s'appliquent, mais si le score en vient à être 6/6, un jeu décisif se joue (le premier rendu à au moins 7, avec deux points d'écart gagne). Un match se joue en 5 sets (4 sets "avec tie-break" + 1 "sans tie-break"), il faut en remporter (au moins) 3 sur 5 pour gagner le match.

Le principe de décompte des points étant acquis, il est temps de poser la question qui nous intéresse: imaginons qu'un joueur Alpha dispute un match contre un joueur Beta. Sachant que Alpha a à peu près une chance sur 3 de réussir un point, quelle est, pour Alpha, la probabilité de gagner le match ?

__Étape un : gagner un jeu__

Du point de vue de Alpha, pour gagner un jeu contre Beta, le plus simple est de gagner 4 points successifs : la probabilité est de p^4, où $p=1/3$ est la probabilité de gagner un point (la probabilité est donc d'une chance sur 81). A moins de lui laisser gagner un point sur 5, ce qui peut se passer de 4 manières différentes : gagner le 1er coup et ensuite gagner les 4 autres, ou alors gagner le 2ème et ensuite gagner les 4 autres etc. En notant q la probabilité que Beta gagne un point (et donc, $q=1-p$), la probabilité de gagner de cette façon est de $4qp^4$.

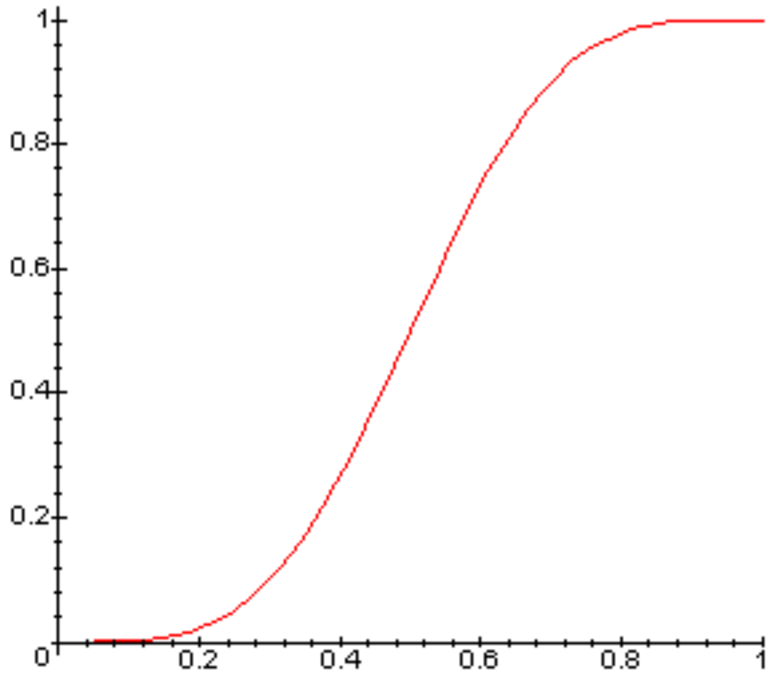
Ainsi, par exemple, il y a 10 façons de gagner avec un score final de 4 points à 2, 20 avec 5 points à 3, etc.
La probabilité pour Alpha de gagner un jeu est donc :

$$p^4+4qp^4+10q^2p^4+20q^3p^5+40q^3p^5+80q^4p^6+...$$

A cause de cette règle des deux points d'écart, un jeu peut durer théoriquement aussi longtemps que l'on veut (en oubliant la pluie, la nuit...), d'où la somme infinie. On peut alors démontrer (les observateurs auront remarqué qu'il s'agit en fait d'une somme géométrique) que la probabilité de gagner un jeu est alors égale à :

$$p^4 + 4qp^4 - 10\frac{p^4q^2}{2pq-1}$$

La représentation graphique de la fonction qui associe à une valeur de p la probabilité de gagner un jeu est alors la suivante:



Graphique 1: Probabilité de gagner un jeu en fonction de la probabilité de marquer un point.

A la vue de la courbe, on peut dire que le système des points amplifie la domination du plus fort : si Alpha a une chance sur 3 de gagner un point, alors la probabilité de gagner un jeu de 35/243 ! (Environ 1/7).

<u>Étape deux : gagner un set</u>

Maintenant que l'on sait comment gagner un jeu, il est temps de gagner un set ! Un set peut se gagner avec un score de 6/0, 6/1, 6/2, 6/3, 6/4 ou 7/5. Si c'est 6/6, c'est tie-break, et on rigole (pour les calculs...).

Dans le cas d'un set sans tie-break, les choses sont similaires au cas précédent.

La probabilité de gagner un set sans tie-break est alors, avec p la probabilité de gagner un jeu, et q=1-p :

$$p^6 + 6qp^6 + 21q^2p^6 + 56q^3p^6 - 126\frac{q^4p^6}{2pq-1}$$

L'équation avec tie-break est finalement plus simple à déterminer, mais il reste la probabilité de gagner dans un tie-break :

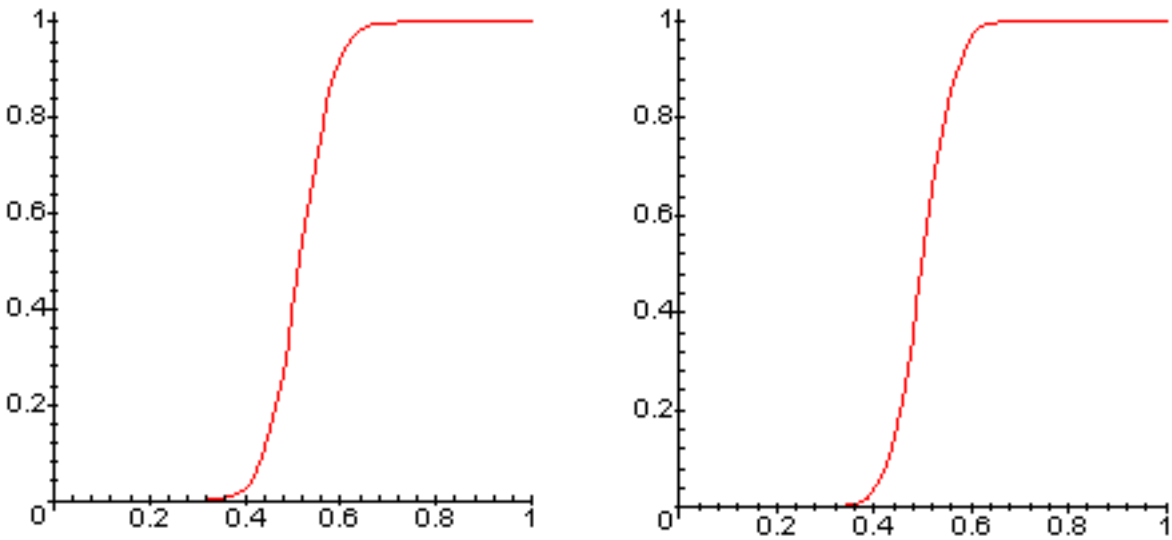
$$p^6 + 6qp^6 + 21q^2p^6 + 56q^3p^6 + 126q^4p^6 + 252q^5p^7 + 504q^6p^6T$$

(Avec T la probabilité de gagner un tie-break, p celle de gagner un jeu, et q=1-p)

La probabilité de gagner un tie-break (7 points à gagner, avec 2 d'avance) en fonction de la probabilité de gagner un point, est la suivante :

$$p^7 + 7p^7q + 28p^7q^2 + 84p^7q^4 - 462\frac{p^7q^5}{2pq - 1}$$

Sous forme de graphe, cela nous donne deux courbes similaires:



Graphique 2: A gauche, la probabilité de gagner un set avec tie-break en fonction de celle de gagner un point ; à droite, la même chose, mais pour un set sans tie-break.

La domination du plus fort se fait encore plus grande !... (avec la probabilité de gagner un point de 1/3, la probabilité de gagner un set ne dépasse pas 0,13% !)

Qu'en sera-t-il à l'issue du match...

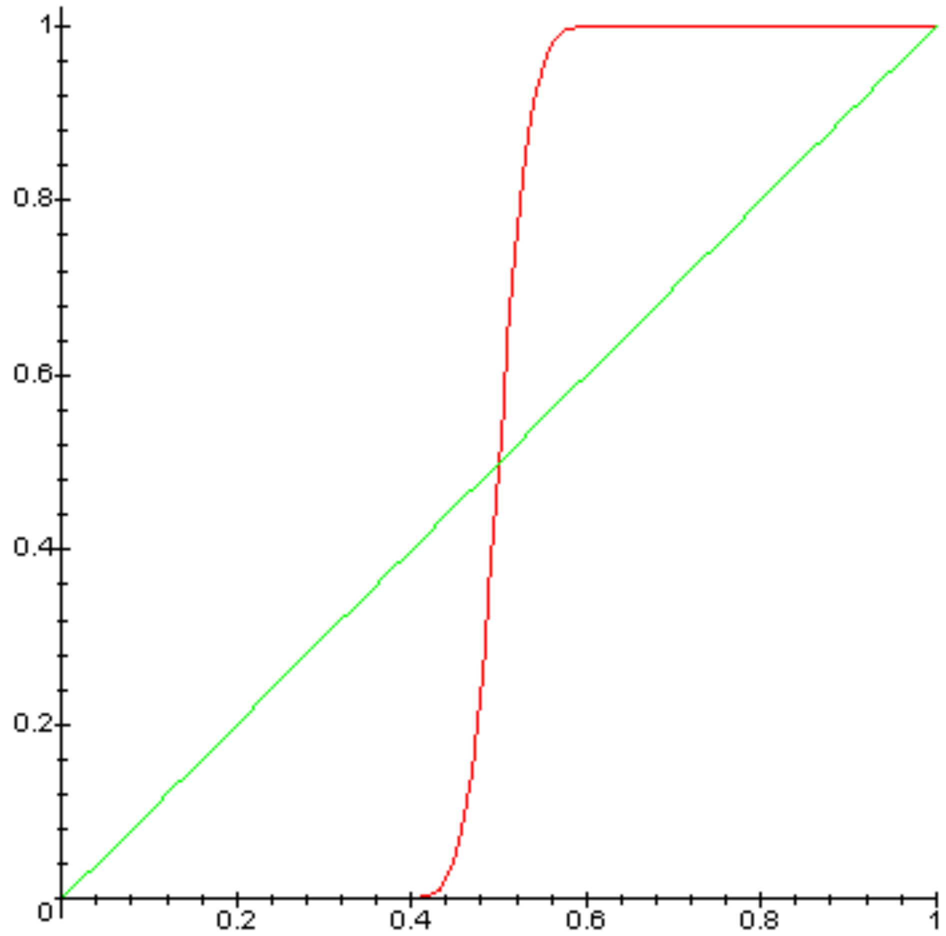
Étape trois : gagner le match

Des considérations analogues montreraient que la probabilité de gagner un match est de :

$$p^3 + 3qp^3 + 6q^2p^4p'$$

où: p est la probabilité de gagner un set avec tie break
p' est la probabilité de gagner sans tie break
q=1-p (la probabilité de perdre un set avec tie break)

Mis sous forme de graphique, cela donne :



Graphique 3: Probabilité de gagner le match on fonction de la probabilité de gagner un point

Le graphique est éloquent : Alpha n'a aucune chance contre Beta! Seulement une chance sur 37 millions !

Questions:

1. Commentez la phrase: « A la vue de la courbe, on peut dire que le système des points amplifie la domination du plus fort »

2. Justifier l'approximation « environ 1/7 » dans l'affirmation: « la probabilité de gagner un jeu est de 35/243 (Environ 1/7) »

3. Justifier l'affirmation: « Ainsi, par exemple, il y a 10 façons de gagner avec un score final de de 4 points à 2 »

4. A l'aide du graphique 3 estimez la valeur de la probabilité p nécessaire pour dépasser 1% de chance de gagner un match.

5. Si f(p) désigne la probabilité d'un gagner un jeu en fonction de p, que vaut: f(p)+f(1-p)? f(0,5)?

Réponses:

1. On peut s'attendre à ce que le candidat remarque l'allure « quasi-verticale » de la courbe au voisinage de 0,5.

2. 1/7 ≃ 0,1428 et 35/243 ≃ 0,144. On peut également demander au candidat de réduire au même dénominateur la différence et de l'estimer.

$$35/243-1/7=2/1701 \simeq 0{,}001$$

3. Notons, par exemple, BBAAA la configuration où Beta gagne les deux premiers points et Alpha les quatre autres (autrement dit la séquence, si Alpha est au service: 0-15, 0-30, 15-30, 30-30, 40-30, Jeu). Les dix configurations sont:

BBAAAA-BABAAA-BAABAA-BAAABA-ABBAAA-ABABAA-ABAABA-AABBAA-AABABA-AAABBA

Cela revient à choisir les 10 (= 2 parmi 5) emplacements du point gagné par Beta lors des cinq premiers points, le sixième étant gagné par Alpha.

4. Environ 45%.

5. f(p)+f(1-p)=1 et f(0,5)=0,5.

Corrigé Exercice Sans Préparation

Question logique

Supposons qu'un test de dépistage d'une maladie, que nous appellerons l'intuitionite aigüe, est fiable à 99 pour cent.
Vous passez le test et il est positif....
Que pouvez-vous en déduire ?

Réponse :

On ne peut rien déduire sur la probabilité d'être malade.
Il manque l'information (cruciale) de la probabilité (a priori) d'être malade…

Question numérique

Avec les chiffres de 1 à 7 il est possible de former 1x2x3x4x5x6x7=5040 nombres correspondants aux permutations de ces sept chiffres.
Par exemple les nombres 1234567 et 3546712 sont deux de ces permutations.

1. Si ces 5040 nombres sont rangés en ordre croissant quel est celui qui occupe la 7ème position ?

2. Quel est celui qui occupe la 721-ème position ?

Réponse :

1. *Les 6 premiers nombres sont obtenus en commençant par 1234 et en permutant les 3 derniers. Dans l'ordre:*

   1234567-1234576-1234657-1234675-1234756-1234765

   Le 7ème est donc: 1235467

2. *En remarquant que 6!=720 le 721-ème nombre est donc: 2134567.*